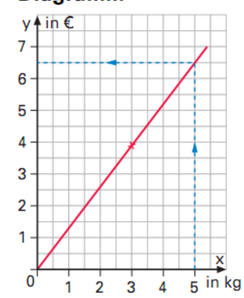
Grundwissen Mathematik: 8. Jahrgangsstufe

Diagramm

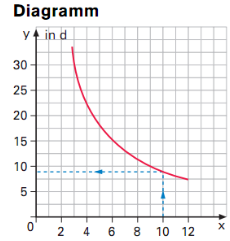


1. *Direkt proportionale Größen*

x und y sind direkt proportional, wenn

- dem n-fachen Wert für x der n-fache Wert für y entspricht,
- die Wertepaare **quotientengleich** sind: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$
- $y = c \cdot x$ ist,
- das x-y-Diagramm eine **Ursprungsgerade** ist.

Diagramm



2. *Indirekt proportionale Größen*

x und y sind indirekt proportional, wenn

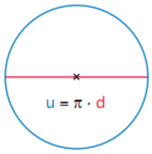
- dem n-fachen Wert für x der n-te Teil von y entspricht,
- die Wertepaare **produktgleich** sind: $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$
- $y = \frac{c}{x}$ ist,
- das x-y-Diagramm eine **Hyperbel** ist.

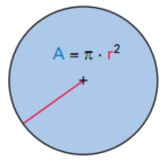
3. *Der Kreisumfang und -fläche*

Kreiszahl: $\pi = 3{,}14 \ldots$

Kreisumfang: $u = \pi \cdot d = 2 \cdot r \cdot \pi$

Kreisflächeninhalt: $A = r^2 \cdot \pi$

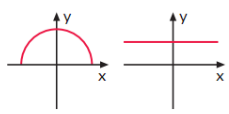




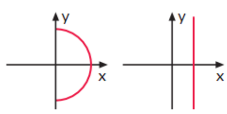
4. *Funktion*

Abhängige Größen x und y werden durch Funktionen beschrieben. Eine Funktion f ist eine **eindeutige Zuordnung**: Sie ordnet jedem x-Wert genau einen y-Wert zu.
Wir schreiben dafür mit dem **Zuordnungspfeil**: $x \mapsto y$
Der von x abhängige Wert f(x) bzw. y heißt **Funktionswert**. Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung liegen beim Graphen einer Funktion nie Punkte übereinander.

Funktionen:



Keine Funktionen:



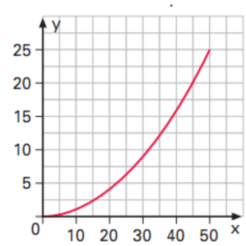
5. *Beschreiben einer Funktion*

- durch einen **Text**

  Den Bremsweg y eines Autos in Metern erhält man, wenn man die vom Tachometer angezeigte Zahl x durch zehn dividiert und das Ergebnis quadriert.

- durch eine **Wertetabelle**

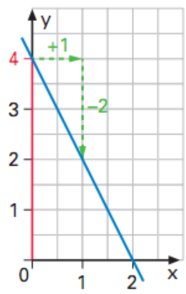
x	0	10	20	30	40	50
y	0	1	4	9	16	25



- durch eine **Gleichung** $y = \left(\frac{1}{10}x\right)^2$
- durch einen **Graphen**
- durch eine **Zuordnungsvorschrift** $x \to \left(\frac{1}{10}x\right)^2$ **„dem x wird $\left(\frac{1}{10}x\right)^2$ zugeordnet“**

6. *Lineare Funktion*

Gleichung: $y = mx + t$ oder $f(x) = mx + t$
m ist die **Steigung** und
t der **y-Abschnitt** der zugehörigen Geraden.



Zeichnen mithilfe von m und t

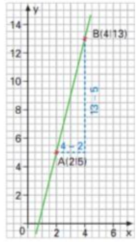
Beispiel: $y = -2x + 4$

- y-Abschnitt (0 | 4) markieren;
- von dort den Nenner von $m = \frac{-2}{1}$,also +1, in die x-Richtung
- und dann den Zähler, also −2, in die y-Richtung abtragen.

Ein x-Wert, für den der Funktionswert y null ist, heißt **Nullstelle**: (in diesem Beispiel: x = 2).

m = 0	m < 0	m > 0	t = 0
Graph parallel zur x-Achse	Gerade fällt	Gerade steigt	Gerade geht durch (0/0)

7. *Aufstellen der Gleichung einer Geraden*



Beispiel: Gerade durch A (2 | 5) und B (4 |13)

Steigung: $m = \frac{\text{Höhenzuwachs}}{\text{Längenzuwachs}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{13-5}{4-2} = \frac{8}{2} = 4$

also: y = 4x + t, dann A einsetzen: 5 = 4·2 + t

$\Rightarrow$ t = −3 $\Rightarrow$ Gleichung: y = 4x− 3

8. *Schnittpunkt zweier Geraden*

Beim Berechnen des Schnittpunkts zweier Geraden müssen die Funktionsgleichungen gleich gesetzt werden.

Beispiel: f(x) = 2x – 4 und g(x) = 0,4x + 1

Gleichsetzen: 2x – 4 = 0,4x + 1

1,6x = 5

$x = \frac{25}{8}$

x einsetzen in eine der Gleichungen: also: $S\left(\frac{25}{8} \mid 2\frac{1}{4}\right)$

9. *Lineare Ungleichungen*

Beim Multiplizieren oder beim Dividieren einer Ungleichung mit einer negativen Zahl müssen wir das Ungleichheitszeichen umkehren.

Beispiel:

−3x < 6 | :(−3)

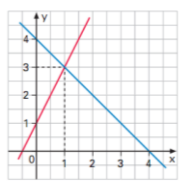
x > −2

Die Lösungsmenge wird in der Intervallschreibweise angegeben: $\mathbb{L} =]-2;\infty[$

10. *Lineare Gleichungssysteme*

(I) 4x − 2y = −2 $\Rightarrow$ (I*) y = 2x +1

(II) x + y = 4 $\Rightarrow$ (II*) y = −x + 4

Gleichsetzverfahren	Einsetzverfahren	Additionsverfahren	Grafische Lösung
(I*) = (II*) 2x + 1 = −x + 4 3x = 3 x = 1	z. B. (II*) in (I) einsetzen: 4x − 2(−x+4) =−2 6x – 8 = −2 6x = 6 x = 1	(I): 4x – 2y = – 2 (II): x + y = 4 (I): 4x – 2y = −2 2·(II): 2x + 2y = 8 6x + 0 = 6 x = 1	

Die Lösung x = 1 in (I) oder (II) einsetzen: y = 3 $\Rightarrow$ $\mathbb{L}$ = {(1|3)} $\mathbb{L}$ = {(1|3)}

Sonderfälle:

Es gibt keine Lösung	Es gibt unendlich viele Lösungen
(I) 2x − y = −1 $\Rightarrow$ y=2x+1 (II) 6x − 3y = 6 $\Rightarrow$ y=2x−2 Additionsverfahren: −3 · (I) +(II) $\Rightarrow$ 0 = 9 (falsch)	(I) 2x − y = −1 $\Rightarrow$ y=2x+1 (II) 6x − 3y = −3 $\Rightarrow$ y=2x+1 Additionsverfahren: −3 · (I) +(II) $\Rightarrow$ 0=0 (wahr)
Grafisch: zwei parallele Geraden	Grafisch: zwei identische Geraden

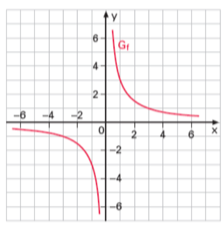
11. *Bruchterme und Bruchfunktionen*

Bei einem **Bruchterm** treten Variable im Nenner auf: z. B. $\frac{3}{x}, \frac{3}{x-1}, \frac{x+1}{x}, \frac{a-3}{a^2}$

Die **Definitionsmenge** D enthält nur Zahlen, für die der Nenner nicht 0 ist.

Beispiel:

Für $\frac{3}{x-1}$ ist $\mathbb{D} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$



Bruchfunktionen Beispiel: Für $f(x) = \frac{3}{x}$ ist $\mathbb{D}_f = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Der Graph ist eine **Hyperbel**.

12. Transformation von Hyperbeln

Ausgangsfunktion	Verschiebung in x-Richtung um 2 (nach rechts)	Verschiebung in y-Richtung um 4 (nach oben)	Spiegelung an der x-Achse
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{x}+4$	$-\frac{1}{x}$

13.Rechnen mit Bruchtermen

Zuerst Zähler und Nenner faktorisieren! → KÜRZEN!

Beispiel: $\frac{2x+2}{x^2+x}=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}=\frac{2}{x}$

In Summen und Differenzen darf nicht gekürzt werden!
Brüche mit gleichem Nenner heißen **gleichnamig**.
Addieren/Subtrahieren: *Zuerst durch Erweitern gleichnamig machen, dann Zähler plus/minus Zähler, Nenner beibehalten!*

Beispiel: $\frac{2}{a-2}-\frac{1}{a}=\frac{2a}{(a-2)\cdot a}-\frac{(a-2)\cdot 1}{(a-2)\cdot a}=\frac{2a-(a-2)}{(a-2)\cdot a}=\frac{2a-a+2}{(a-2)\cdot a}=\frac{a+2}{(a-2)\cdot a}$

Multiplizieren: *Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner!*

Beispiel: $\frac{2x+4}{x}\cdot\frac{3x}{x+2}=\frac{2(x+2)\cdot 3x}{x(x+2)}=\frac{6}{1}=6$

Dividieren: *Multiplizieren mit dem Kehrbruch!*

Beispiel: $\frac{6}{x+1}:\frac{3}{x^2+x}=\frac{6}{x+1}\cdot\frac{x^2+x}{3}=\frac{6\cdot x\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot 3}=\frac{2x}{1}=2x$

14.Einfache Bruchgleichung lösen

Beispiel**:** $\frac{3}{x}=\frac{1}{x-2}$ | · x (x – 2)

3(x – 2) = 1x
3x – 6 = x | − x + 6
2x = 6 | : 2
x = 3 $\in \mathbb{D}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{L}=\{3\}$

Vorgehensweise:

- Definitionsmenge bestimmen;
- Falls möglich: Bruchterme kürzen;
- Mit dem Hauptnenner multiplizieren;
- Bruchtermfreie Gleichung lösen;
- Überprüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört;
- Lösungsmenge angeben!

15. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Die ganze Hochzahl n der Potenz a^n zählt in der ausführlichen Schreibweise die Faktoren – für eine negative Hochzahl im Nenner.

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ und $10^{-3}=\frac{1}{10\cdot 10\cdot 10}=\frac{1}{1000}$

Beachte:

a) $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

b) $a^0 = 1$

Wissenschaftliche Schreibweise von Zahlen (Gleitkommadarstellung)
Die ganze Zahl n in der Gleitkommadarstellung $a\cdot 10^n\ (1\le a<10)$ gibt an, um wie viele Stellen das Komma im Dezimalbruch a zu verschieben ist, damit wir die gewöhnliche dezimale Schreibweise der Zahl erhalten.

$2{,}1\cdot 10^6 = 2100000$ bzw. $2{,}1\cdot 10^{-6} = 0{,}0000021$

16. Rechnen mit Potenzen

m, n $\in \mathbb{Q}$

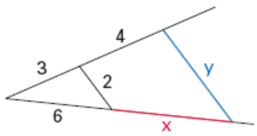
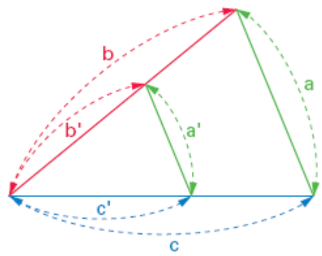
Multiplizieren: $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$

Dividieren: $a^n : a^m = a^{n-m}$

Potenz einer Potenz: $\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$

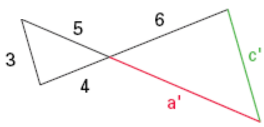
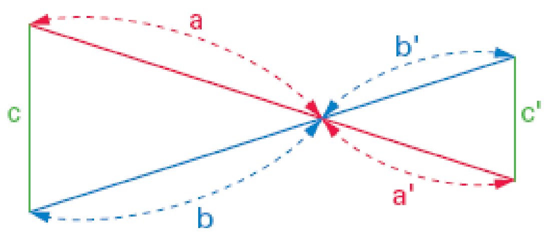
17.Strahlensätze an der V-Figur

Wenn a || a' ist, gilt:

1. Strahlensatz	2. Strahlensatz
	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
Beispiel:  $\frac{x}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 4}{3} = 8$ $\frac{y}{2} = \frac{4+3}{3} \Rightarrow y = \frac{7 \cdot 2}{3} = 4\frac{2}{3}$	

18.Strahlensätze an der X-Figur

Wenn c||c' ist, gilt:

1. Strahlensatz	2. Strahlensatz
	$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
Beispiel: $\frac{a'}{5} = \frac{6}{4} \Rightarrow a' = \frac{6 \cdot 5}{4} = 7{,}5$ $\frac{c'}{3} = \frac{6}{4} \Rightarrow c' = \frac{6 \cdot 3}{4} = 4{,}5$ 	

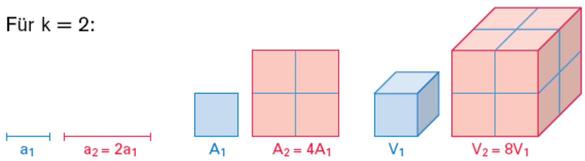
*19. **Ähnliche Figuren***

Zwei Figuren heißen **ähnlich**,
• wenn die Verhältnisse entsprechender Seiten alle gleich sind **und**
• entsprechende Winkel gleich groß sind.
Dreiecke sind schon ähnlich, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

Flächeninhalte und Volumina bei ähnlichen Figuren

• Eine ähnliche Figur mit k-fachen Seitenlängen hat den k^2-fachen Flächeninhalt.

• Ein ähnlicher Körper mit k-fachen Kantenlängen hat das k^3-fache Volumen.



20. Laplace-Experimente

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse möglich sind. Die Menge Ω aller Ergebnisse nennt man **Ergebnisraum**. Sind alle Ergebnisse eines Zufallsexperiments gleich wahrscheinlich, bezeichnet man es als **Laplace-Experiment**.

Beispiel: Würfeln mit dem Ergebnisraum Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Ergebnis (Elementarereignis): Element aus dem Ergebnisraum
Ereignis: Zusammenfassung von Ergebnissen
unmögliches Ereignis { }: kann nicht eintreten, (z. B. Würfeln einer 7)
sicheres Ereignis Ω: ganzer Ergebnisraum, (z. B. Würfeln einer 1, 2, 3, 4, 5 oder 6)
Ein **Ereignis** ist eine Zusammenfassung von Ergebnissen. Sind alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich, ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A

$$P(A) = \frac{\textit{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{g}{m}$$ („günstige durch mögliche“)

Beispiel Würfeln**:** P(ungerade Primzahl) = P(3, 5) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Zählprinzip
Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Anzahl der möglichen Ergebnisse, indem man die Anzahl der Möglichkeiten der einzelnen Stufen miteinander multipliziert.