© St. Marien-Gymnasium, 2013

Algebra

1. Terme

Terme sind Rechenausdrücke, die aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen bestehen. Variablen sind dabei Platzhalter für Zahlen oder Größen.
Beispiele: $T(x) = x^3 – 4x$; $T(a;b) = a^2 + b^2$

Terme, die bei jeder Belegung der Variablen durch Zahlen den gleichen Termwert liefern, heißen **äquivalent.**
Beispiel: $T_1(x) = x(3 – x)$ und $T_2(x) = −x^2 + 3x$ sind äquivalente Terme.

Addition und Subtraktion von Termen

Gleichartige Terme (also Terme mit gleichen Kombinationen von Variablen) werden addiert bzw. subtrahiert, indem man ihre Koeffizienten (= Zahlen vor den Variablen) addiert bzw. subtrahiert und die gemeinsamen Variablen beibehält.
Beispiele: $4ab + 5ab = 9ab$; $−12c^2 – 9c^2 = −21c^2$; $90x^3y^2z – 110x^3y^2z = −20x^3y^2z$

Nicht gleichartige Terme können nicht zusammengefasst oder vereinfacht werden.
Beispiele: Die Terme $−9x + 4y$ oder $5x^2y – 20xy^2$ kann man nicht weiter zusammenfassen.

Multiplikation von Termen

Bei der Multiplikation von Termen dürfen Zahlen und Variablen vertauscht werden.

Beispiele: $4c \cdot 5d = 4 \cdot c \cdot 5 \cdot d = 4 \cdot 5 \cdot c \cdot d = 20cd$;
$3x \cdot (−9) \cdot x = 3 \cdot (−9) \cdot x \cdot x = −27x^2$

Auflösen von Klammern

Steht ein Pluszeichen vor der Klammer, dann kann man die Klammer einfach weglassen: $+(9z – 4) = 9z – 4$.
Steht ein Minuszeichen vor der Klammer, dann lässt man die Klammer weg und kehrt dabei gleichzeitig **alle (!)** Vorzeichen in der Klammer um: $–(9z – a + 4) = –9z + a – 4$.
Merkregel: *„Steht ein Minus vor der Klammer, dreht sich um der ganze Jammer."*

Ausmultiplizieren von Klammern

Man multipliziert zwei Summen (bzw. Differenzen) miteinander, indem man jedes Termglied in der ersten Klammer mit jedem Glied der zweiten Klammer unter Berücksichtigung der Vorzeichen multipliziert und die entstandenen Produkte mit dem richtigen Vorzeichen aufsummiert.

Beispiel: $$\underbrace{(3x+2y)}_{\text{2 Termglieder}} \cdot \underbrace{(4a-b-5c)}_{\text{3 Termglieder}} = \underbrace{12ax-3bx-15cx+8ay-2by-10cy}_{2\cdot 3=6 \text{ Termglieder}}$$

Tipp: Während des Ausmultiplizierens die erledigten Paare unterstreichen. Am Schluss muss jedes Termglied so oft unterstrichen sein, wie die Anzahl der Glieder in der anderen Klammer beträgt. Also im Beispiel in der linken Klammer jeweils drei und in der rechten Klammer zwei Unterstreichungen pro Glied.

Ausklammern (= „Faktorisieren")

Enthalten in einer Summe alle Glieder (egal ob mit positiven oder negativen Vorzeichen) einen gemeinsamen Faktor, so kann man die Summe in ein Produkt verwandeln, indem man den gemeinsamen Faktor aus jedem Glied der Summe „herauszieht" (durch Dividieren mit dem gemeinsamen Faktor).

Kontrolle: Wenn man dieses Produkt wieder ausmultipliziert, muss der ursprüngliche Term herauskommen.

Beispiel: $350ax^2y + 50ax^3 – 150axy^2 = 50ax \cdot (7xy + x^2 – 3y^2)$

Kontrolle: $50ax \cdot (7xy + x^2 – 3y^2) = 350ax^2y + 50ax^3 – 150axy^2$ → stimmt!

2. Gleichungen lösen

Gleichungen, die dieselbe Lösungsmenge besitzen, heißen **äquivalent**.
Eine Umformung, die eine Gleichung in eine äquivalente überführt, heißt **Äquivalenzumformung**.

Äquivalenzumformungen für Gleichungen sind:

1.) Addition bzw. Subtraktion desselben Terms (Zahlen, Variablen) auf beiden Seiten.
2.) Multiplikation oder Division beider Seiten mit derselben von Null verschiedenen Zahl.

Beispiel:

$2\cdot(24-x)$	$=$	$4\cdot(3-2x)-3x$		Klammern auflösen
$48-2x$	$=$	$12-8x-3x$		auf jeder Seite zusammenfassen

In den nächsten Schritten alle Terme mit x auf die eine Seite, alle Terme ohne x auf die andere Seite:

$48-2x$	$=$	$12-11x$	$\mid +11x$	auf beiden Seiten 11x addieren
$48+9x$	$=$	12	$\mid -48$	auf beiden Seiten 48 subtrahieren
$9x$	$=$	-36	$\mid :9$	auf beiden Seiten durch 9 teilen → x isolieren
x	$=$	-4		Lösung für x

Jetzt noch die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ bestimmen. Dabei muss man die Grundmenge $\mathbb{G}$ beachten!
Für die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$ ergibt sich $\mathbb{L} = \{-4\}$
Für die Grundmenge $\mathbb{G} = \mathbb{N}$ ergibt sich $\mathbb{L} = \{\ \}$ (leere Menge) [alternatives Symbol: $\mathbb{L} = \varnothing$]

Probe: Zur Sicherheit kann man am Schluss die berechnete Lösung in die **erste (!)** Zeile der Gleichung für jedes x einsetzen und dann so lange zusammenfassen, bis man erkennt, ob links und rechts vom Gleichheitszeichen tatsächlich der gleiche Wert steht.

Beispiel:

$2\cdot(24-(-4))$	$=$	$4\cdot(3-2\cdot(-4))-3\cdot(-4)$	Lösung –4 für x eingesetzt
$2\cdot(24+4)$	$=$	$4\cdot(3+8)+12$	innere Klammern aufgelöst
$2\cdot 28$	$=$	$4\cdot 11+12$	alle Klammern aufgelöst; alles zusammenfassen
56	$=$	56	linke Seite gleich rechte Seite → Lösung stimmt!

Und wenn's nicht stimmt → Fehler suchen! **Beachte aber**: Der Fehler kann auch in der Probe stecken!

Weitere Tipps für das Arbeiten mit Gleichungen:

- Liegen bei einer Gleichung Brüche und Dezimalzahlen gleichzeitig vor, dann ist es sinnvoll, alles in die gleiche Schreibweise zu überführen. Zum Weiterarbeiten eignen sich Brüche am besten!
- Statt durch einen Bruch zu dividieren ist es oft einfacher, mit dem Kehrwert des Bruches zu multiplizieren.

3. Rechenregeln für Potenzen

Wenn a, b, n und m natürliche Zahlen sind, dann gelten für das Potenzieren die folgenden Rechenregeln:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}\ ; \qquad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n\ ; \qquad \left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}\ .$$

Außerdem gilt die Festlegung $a^1 = a$.

Beispiele: $x\cdot x^2\cdot x^5 = x^1\cdot x^2\cdot x^5 = x^8$; $(-3z)^3 = (-3)^3\cdot z^3 = -27z^3$; $\left(2^2\right)^5 = 2^{10} = 1024$

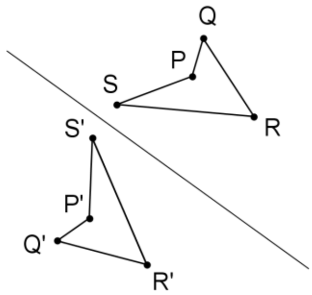
WICHTIG: Die Terme $(a+b)^n$ oder $a^n + a^m$ kann man mit diesen Rechenregeln **nicht vereinfachen!!**
Es gibt keine Potenzrechenregeln für Summen!

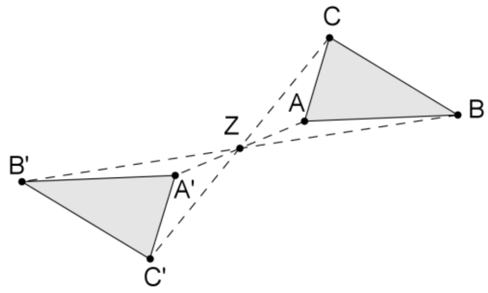
Geometrie

1. Symmetrie

Achsensymmetrische Figuren gehen durch Spiegelung an einer Achse a ineinander über. Ihr Drehsinn wird dabei umgekehrt.

Punktsymmetrische Figuren gehen durch eine Halbdrehung um ihr Zentrum Z ineinander über. Ihr Drehsinn bleibt dabei erhalten.

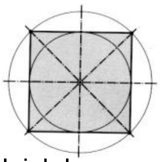




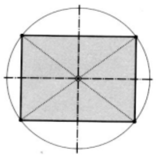
2. Symmetrische Vierecke

Allgemein gilt: **Die Innenwinkelsumme jedes Vierecks beträgt 360°.**
Das **n-Eck** (Vieleck mit n Ecken) hat eine **Innenwinkelsumme von (n–2)·180°** .

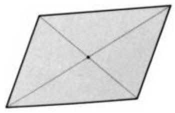
Man unterscheidet folgende symmetrische Vierecke:



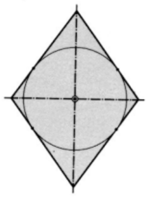
Quadrat: Alle vier Winkel sind rechte Winkel und alle Seiten sind gleich lang. Das Quadrat hat vier Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum.



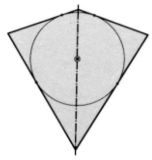
Rechteck: Alle vier Winkel sind rechte Winkel. Gegenüber liegende Seiten sind gleich lang. Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig. Das Rechteck hat zwei Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum.



Parallelogramm: Die Gegenseiten sind parallel und jeweils gleich lang. Gegenüber liegende Winkel sind gleich groß. Das Parallelogramm hat nur ein Symmetriezentrum.



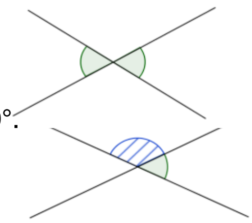
Raute: Alle vier Seiten sind gleich lang. Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich gegenseitig. Die Raute hat zwei Symmetrieachsen und ein Symmetriezentrum.



Drachenviereck*:* An zwei gegenüberliegenden Ecken stoßen gleich lange Seiten zusammen. Eine Diagonale wird von der anderen rechtwinklig halbiert. Es gibt nur eine Symmetrieachse.

Gleichschenkliges Trapez: Zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel. Zudem sind die anderen gegenüberliegenden Seiten (Schenkel) gleich lang. Es gibt nur eine Symmetrieachse.

3. Winkel an Geradenkreuzungen

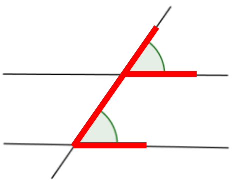


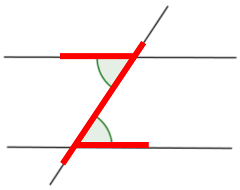
<u>Einfachkreuzung:</u>
Gegenüberliegende Winkel nennt man **Scheitelwinkel**. Sie sind gleich groß.

Benachbarte Winkel bezeichnet man als **Nebenwinkel**. Sie ergänzen sich zu 180°.

<u>Doppelkreuzung</u>:

Hier unterscheidet man:

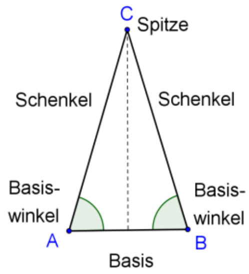




Stufenwinkel (="F-Winkel") und **Wechselwinkel** (="Z-Winkel")

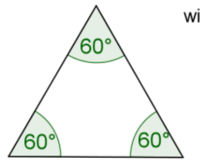
Sind zwei Geraden einer Doppelkreuzung parallel, dann sind jeweils **alle Stufenwinkel gleich groß** und jeweils **alle Wechselwinkel gleich groß**.

4. Besondere Dreiecke

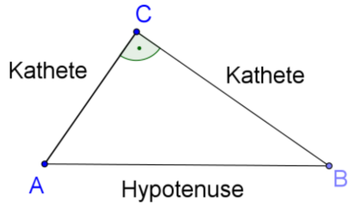


Allgemein gilt: **Die Innenwinkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180°.**

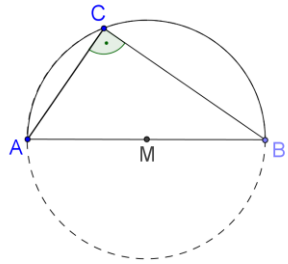
Gleichschenkliges Dreieck: Hat zwei gleich lange Seiten (Schenkel).
Die dritte Seite nennt man Basis. Beide Basiswinkel sind gleich groß.



Gleich<u>seitig</u>es Dreieck: Hat drei gleich langen Seiten.
Alle Innenwinkel sind gleich groß (60°).

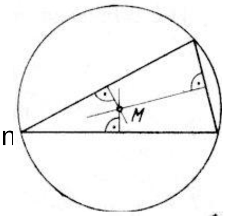


Rechtwinkliges Dreieck: Hat einen rechten Winkel. Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, nennt man Hypotenuse. Die Seiten, die den rechten Winkel einschließen, nennt man Katheten.

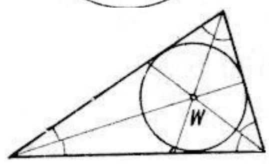


Satz des Thales*:* Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C seinen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf einem Halbkreis über [AB] liegt, wobei [AB] der Durchmesser des Kreises ist.

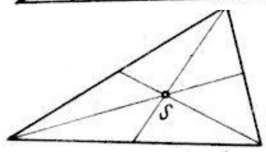
5. Besondere Linien im Dreieck



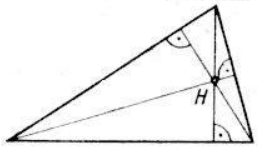
Die Mittelsenkrechten
In jedem Dreieck schneiden sich die drei <u>M</u>ittelsenkrechten der Dreiecksseiten in genau ein
handelt sich um den **U<u>m</u>kreismittelpunkt** des Dreiecks.



Die Winkelhalbierenden
In jedem Dreieck schneiden sich die drei W<u>ink</u>elhalbierenden der Innenwinkel in genau einem Punkt W. Es handelt sich um den **<u>Ink</u>reismittelpunkt** des Dreiecks.



Die Seitenhalbierenden
Die <u>S</u>eitenhalbierende ist die Verbindungsstrecke des Mittelpunkts einer Seite mit der gegenüberliegenden Ecke. In jedem Dreieck schneiden sich die drei Seitenhalbierenden in genau einem Punkt S. Es handelt sich um den **<u>S</u>chwerpunkt** des Dreiecks.



Die Höhen
Die Höhe ist die Lotstrecke von einer Ecke des Dreiecks auf die Gegenseite. In jedem Dreieck schneiden sich die drei Höhen in genau einem Punkt H.

(Die Punkte H, M und S liegen in einem Dreieck stets auf einer Geraden.)

6. Kongruente Figuren

Deckungsgleiche Figuren nennt man kongruent.
Sie stimmen in allen entsprechenden Winkeln und Seitenlängen überein.

Kongruenzsätze für Dreiecke:
Dreiecke sind kongruent zueinander, wenn sie
... in allen drei Seitenlängen übereinstimmen (**SSS-Satz**)
... in einer Seitenlänge und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW-** oder **SWW-Satz***)*
... in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (**SWS-Satz**)
... in zwei Seitenlängen und dem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüber liegt (**SsW-Satz**)